Απειροστικός Λογισμός Ι — Μαθημα 3

Ορισμός αθροίσματος με αναδρομή

Αν a_1, a_2, a_3 $\quad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

$$\boxed{a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

<u>π.χ.</u> $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{i=1}^{5} i^3 = \sum_{k=1}^{5} k^3$

Επίσης $\sum_{k=1}^{7} \theta = 7\theta$

Παραδείγματα Επαγωγικής Απόδειξης:

1) Για κάθε φυσικό αριθμό n ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

(δηλαδή $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$)

<u>Απόδειξη:</u> Με επαγωγή

<u>1º επαγωγικό βήμα:</u> Για $n=1$ η σχέση γράφεται $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ που ισχύει.

<u>γενικό επαγωγικό βήμα:</u> Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για n και θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$

$$\underline{1 + 2 + \dots + n} + (n+1) \underset{\substack{\text{από επαγ.} \\ \text{υπόθεση}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Έτσι, αποδείξαμε πως η $(*)$ ισχύει για $n+1$

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ισχύει η $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{= \sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (*)$

<u>Απόδειξη:</u>

<u>1º επαγωγικό βήμα:</u> Για $n=1$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ που ισχύει.

<u>γενικό επαγωγικό βήμα:</u> Υποθέτουμε πως η $(*)$ ισχύει για n και θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} + (n+1)^2 \underset{\substack{\text{επαγ.} \\ \text{υπόθεση}}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)\,2\left(n + \frac{3}{2}\right)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Άρα, ισχύει για $n+1$. Συνεπώς, από αρχή της επαγωγής ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση: $1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Ανισότητα Bernoulli:

Αν $x>-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1+nx$ (*)

Απόδειξη:

1ο επαγωγικό βήμα: Για $n=1$ η (*) γράφεται $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ που ισχύει ισότητα.

γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι η (*) ισχύει για n και θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$.

$(x+1)^n \geq 1+nx$ εφόσον $x>-1 \Rightarrow x+1>0$

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη με $x+1$: $(x+1)^n(x+1) \geq (1+nx)(1+x) \Rightarrow$

$$(x+1)^{n+1} \geq 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$(x+1)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ Έτσι, αποδείξαμε πως ισχύει για $n+1$.

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής, ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ορισμός: Για $k,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ με $0\leq k\leq n$ θέτουμε $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ονομάζονται συνδυασμοί n ανά k.

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot\beta$

$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\cdot a\beta+1\cdot\beta^2$

$(a+b)^3=1\cdot a^3+3a^2\beta+3\cdot a\beta^2+1\cdot\beta^3$

$(a+b)^4=1\cdot a^4+4a^3\beta+6a^2\beta^2+4a\beta^3+1\cdot\beta^4$

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Για $1\leq k\leq n$: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$

Απόδειξη: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{(k-1)!k(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)}=$

$$=\frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ (ή διώνυμο του Νεύτωνα)

Για $a,b\neq 0$ $n=1,2,\dots$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

<u>Απόδειξη</u>: Με επαγωγή

Για $n=1$: $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \Leftrightarrow$

$$a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1}$$

$a+b = a+b$ που ισχύει

Υποθέτουμε πως ισχύει για n, δηλαδή $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

και Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$: $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{\text{Θέτω } k+1=m \Leftrightarrow k=m-1} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k$$ Η απόδειξη είναι πλήρης.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1+(-1))^n = 0^n = 0.$$

<u>Ορισμός</u>:

$\mathbb{Z} = \{ x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}$ ή $x=0$ ή $-x \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x : x \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των ακεραίων.

$\mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R}\ \exists m,n \in \mathbb{Z}\ n \neq 0\ x = \frac{m}{n} \}$ το σύνολο των ρητών.

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

Θεώρημα: Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών

$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}$ με $n>x$

Απόδειξη: Έστω $x\in\mathbb{R}$. Αν δεν ίσχυε το συμπέρασμα, δηλαδή $n\le x\ \forall n\in\mathbb{N}$, τότε το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο. Άρα, από το αξίωμα της πληρότητας (R_{14}) θα είχε supremum. Θέτω $a=\sup\mathbb{N}$. Επειδή $a-1<a=\sup\mathbb{N}$ $\exists n\in\mathbb{N}$ με $a-1<n \Rightarrow a<n+1$. Άτοπο, διότι $n+1\in\mathbb{N}$ ή $n+1>a=\sup\mathbb{N}$.

Θεώρημα:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists$ μοναδικός $k\in\mathbb{Z}$ τ.ω. $k\le x<k+1$.

Ο k αυτός ονομάζεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται $[x]$

Π.χ. $[3,7]=3$, $[-3,7]=-4$, $[5]=5$

Θεώρημα: Πυκνότητα των Ρητών στους Πραγματικούς.

Αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $x<y$ τότε $\exists q\in\mathbb{Q}$ με $x<q<y$.

Θεώρημα: Έστω $x>0$ και $n\in\mathbb{N}$. Τότε, $\exists$ μοναδικό $y>0$ τ.ω. $y^n=x$.

Σκιαγράφηση της απόδειξης: $A=\{t>0 : t^n<x\}$. Το A εύκολα αποδεικνύεται πως είναι μη κενό και άνω φραγμένο, άρα από το αξίωμα της πληρότητας (R_{14}) έχει supremum. Θέτουμε $y=\sup A$.

Αποκλείοντας τις περιπτώσεις $y^n<x$ και $y^n>x$ προκύπτει $y^n=x$.

Συμβολισμός: Ο μοναδικός y του θεωρήματος συμβολίζεται $\sqrt[n]{x}$ και ονομάζεται n-οστή ρίζα του x.

Για $n=2$: $\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}$

Θεώρημα: Δεν υπάρχει ρητός $y>0$ τ.ω. $y^2=2$

Απόδειξη: Αν υπάρχει τέτοιος ρητός $y=\frac{m}{n}$ $m,n\in\mathbb{N}$ και ο ΜΚΔ των m και n είναι το 1 ή $(m,n)=1$

$y^2=2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow \boxed{m^2=2n^2}\ (*) \Rightarrow m^2$ άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος $\Rightarrow$

$\Rightarrow m=2k$ με $k\in\mathbb{N} \overset{(*)}{\Rightarrow} (2k)^2=2n^2 \Rightarrow 4k^2=2n^2 \Rightarrow 2k^2=n^2 \Rightarrow n^2$ άρτιος $\Rightarrow n$ άρτιος

Άτοπο, αφού $(m,n)=1$ δηλαδή δεν μπορούν να είναι και οι δύο άρτιοι.

Συνεπώς, ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. Τους πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί τους λέμε άρρητους. Το σύνολο των αρρήτων είναι το $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Απόλυτη Τιμή:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες:

α) $|x| = \max\{x, -x\}$

β) Αν $\varepsilon > 0$ $\quad |x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$

γ) Αν $|a-b| < \varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$

δ) $|xy| = |x||y|$

ε) $|x+y| \leq |x| + |y|$

στ) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

Απόδειξη: στ) $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$ (I)

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$ (II)

Από (I) και (II) $\quad ||x|-|y|| \leq |x-y|$

Λήμμα: $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $b_1, \dots, b_n > 0$ με $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$

Τότε $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$.

Απόδειξη: Με επαγωγή

(Η ισότητα ισχύει μόνο αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$)

Για $n=1$ προφανές

Για $n=2$: $b_1 \cdot b_2 = 1$. Αν $b_1 = b_2 = 1$ τότε προφανώς $b_1 + b_2 = 2$ ισχύει

Διαφορετικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας $0 < b_1 < 1 < b_2 = \frac{1}{b_1}$

$b_1 + b_2 > 2 \Leftrightarrow b_1 + \frac{1}{b_1} > 2 \overset{b_1 > 0}{\Longleftrightarrow} b_1^2 + 1 > 2b_1 \Leftrightarrow b_1^2 - 2b_1 + 1 > 0 \Leftrightarrow (b_1 - 1)^2 > 0$ ισχύει

Γενικό επαγωγικό βήμα: Το λήμμα ισχύει για n και θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$.

$b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} > 0$ με $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot b_{n+1} = 1$

α) Αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b_{n+1} = 1$, τότε προκύπτει $b_1 + \ldots + b_{n+1} = n+1$

β) Αν δεν ισχύει το α) τότε $\exists k, \lambda \in 1, \dots, n+1$ τ.ω. $0 < b_k < 1$, $b_\lambda > 1$

Υποθέτω, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 < b_1 < 1$ και $b_{n+1} > 1$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix}(1-b_1) > 0 \\ (b_{n+1}-1) > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

Έχουμε $(b_1 \cdot b_{n+1}) \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$

$\Rightarrow (1-b_1)(b_{n+1}-1) > 0$

Από επαγωγική υπόθεση: $b_1 \cdot b_{n+1} + b_2 + \ldots + b_n \geq n$

$\Rightarrow (b_{n+1} - 1 + b_1 b_{n+1} + b_1) >$

$\Rightarrow b_{n+1} + b_1 b_{n+1} > b_1 + 1$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} = \underbrace{(b_1 + b_{n+1})}_{> 1 + b_1 b_{n+1}} + b_2 + \ldots + b_n > 1 + b_1 \cdot b_{n+1} + b_2 + \ldots + b_n > n \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 \cdot b_{n+1} + b_2 + \ldots + b_n \geq n+1$